LinAlg PVK HS19 06.01.20

Zeitplan:

Morgen:

- QR mit Givens / Householder
- Untervektorräume
- Basis, Kern & Bild
- Gram-Schmidt
- Verallgemeinerte Norm & Skalarprodukt
- $A^k x$ (Eigenwertproblem)
- Differentialgleichungen 1. Ordn.

Nachmittag:

- Prüfung HS 18
  - ↳ Orthogonalisierung & QR
  - ↳ e^C
  - ↳ Lineare Abbildungen & Abbildungsmatrizen
  - ↳ Basiswechsel
  - ↳ Ausgleichsrechnung mit SVD
  - ↳ Beweisaufgabe (Schur-Zerlegung)
  - ↳ Multiple Choice

QR-Zerlegung mit Givensrotation & Householderspiegelung:

Beispiel Givens:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \boxed{-1} & 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \boxed{\cdot} & \cdot & \cdot \\ \underset{31}{\boxed{\cdot}} & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

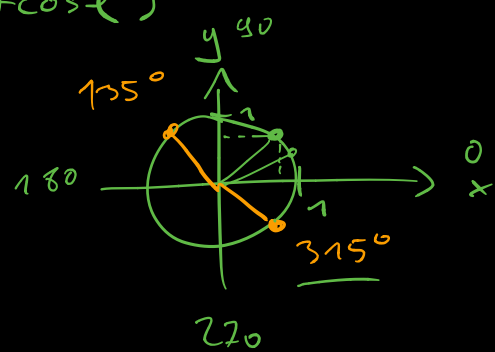
(i) a_{21} eliminieren

(ii)

$$G = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= QR \\ G \cdot A &= R \end{aligned}\right\} \quad Q = G^T$$

$$G \cdot A = \begin{bmatrix} \cos\varphi - \sin\varphi & 3\cos\varphi + 4\sin\varphi \\ \underbrace{\boxed{-\sin\varphi - \cos\varphi}}_{=0} & -3\sin\varphi + 4\cos\varphi \end{bmatrix} = R$$



$$\cos\varphi = -\sin\varphi$$

$$\cos(315°) = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\sin(315°) = \underline{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow Q = G^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}}}$$

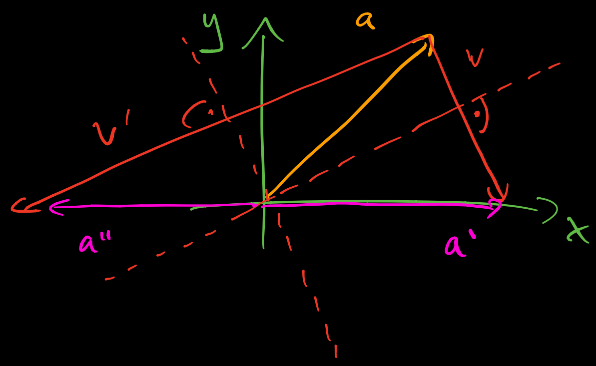
$$G_1 A = R'$$

$$G_2 (G_1 A) = R$$

$$Q = (G_2 G_1)^T = G_1^T G_2^T$$

Beispiel Householder:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & * & * \\ \boxed{2} & * & * \\ \boxed{1} & * & * \end{bmatrix}$$



(i) Wollen $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ auf $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(ii)
$$a' = \|a\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|a\| = 3$$

(iii) $$v = a + a' = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$H = I - \frac{2}{v^T v} v v^T = I - 2uu^T \qquad u = \frac{v}{\|v\|}$$

(iv)
$$u = \frac{v}{\|v\|} = \underline{\frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\|v\| = \sqrt{25+4+1} = \sqrt{30}$$

(v)
$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{30} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 25 & 10 & 5 \\ 10 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\frac{1}{15} \begin{bmatrix} -10 & -10 & -5 \\ -10 & 11 & -2 \\ -5 & -2 & 14 \end{bmatrix}}$$

$$H_1 \cdot A = \begin{bmatrix} -3 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \boxed{\star} & \star \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & H \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \star \\ \star \\ \star \end{bmatrix} \text{ auf } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H_2 \cdot H_1 \cdot A = \begin{bmatrix} -3 & \Delta & \Delta \\ 0 & \times & \Delta \\ 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix} = R$$

$$Q = (H_2 H_1)^T = H_1^T H_2^T$$

Untervektorraum & Regeln:

$U \neq \emptyset$ ist ein UVR, falls er eine Teilmenge eines VR ist, und: $\forall a,b \in U$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(i) $a+b \in U$

(ii) $\alpha \cdot a \in U$

Beispiel: $U = \{ A \in V \mid A^T = -A \}$ $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\forall u_1, u_2 \in U$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(i) $(u_1+u_2)^T = u_1^T + u_2^T = -u_1 - u_2 = -(u_1+u_2)$ ✓

(ii) $(\alpha u_1)^T = u_1^T \alpha^T = \alpha u_1^T = -\alpha u_1 = -(\alpha u_1)$ ✓

Basis beweisen:

Beispiel: P_2, $B = \{1, x, x^2\}$, $C = \{c^{(1)} = 2,\ c^{(2)} = x^2+x-1,\ c^{(3)} = 2x^2-5x\}$

1)
$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} c^{(1)} \\ x &= \frac{2c^{(2)} - c^{(3)} + c^{(1)}}{7} \\ x^2 &= \frac{5c^{(2)} + c^{(3)} + \frac{5}{2} c^{(1)}}{7} \end{aligned}\right\}$$

C ist ein Erzeugendensystem & minimal, da nur 3 Vektoren

$\Rightarrow$ Basis

2) Zeigen lin. unabh.:

$$\begin{array}{cccc} c^{(1)} & c^{(2)} & c^{(3)} \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}} \end{array} \xrightarrow{G.} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank} = 3 \Rightarrow \text{lin. unabh.}$$

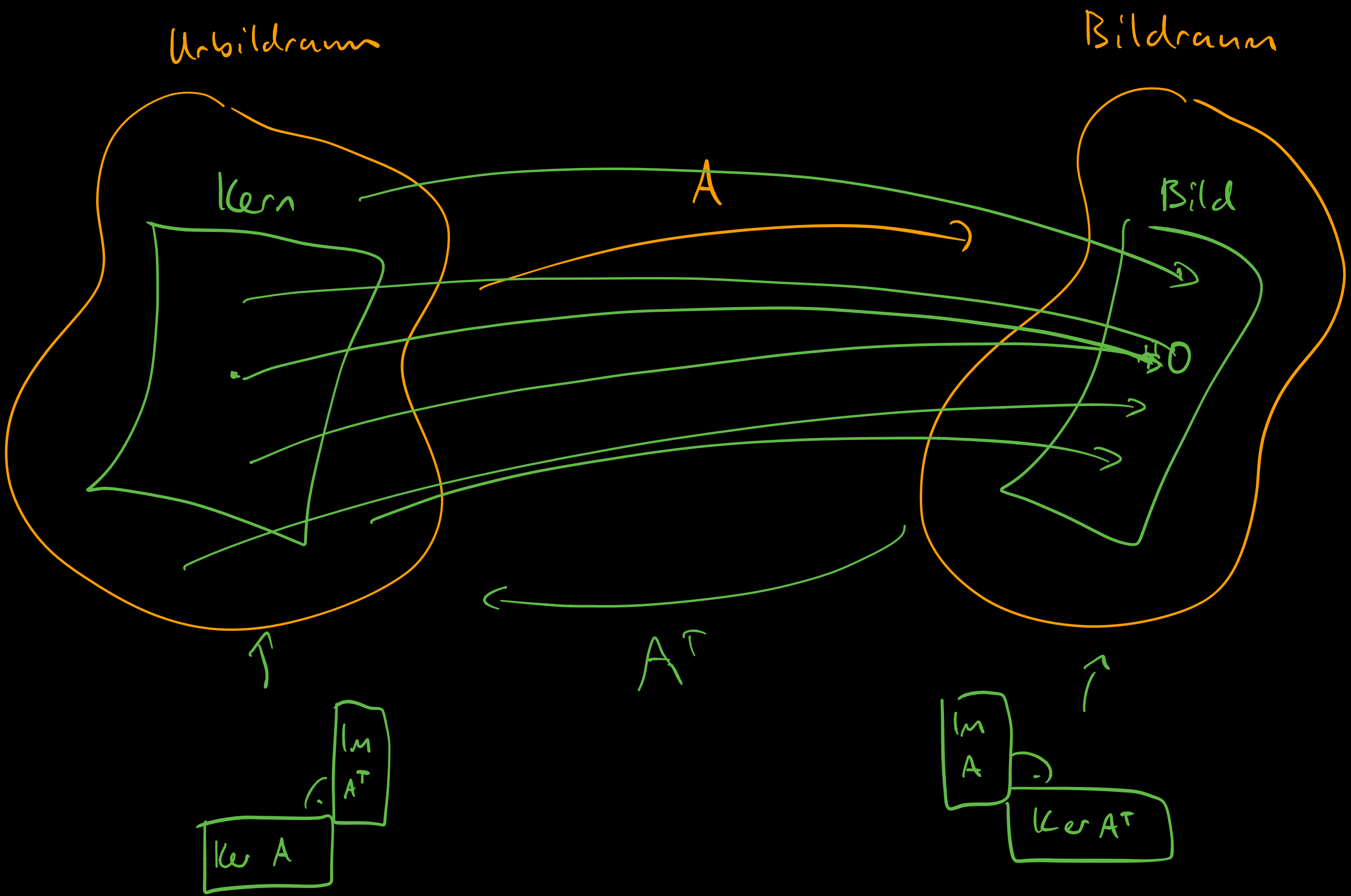
+ 3 Vektoren für 3 dimensionen

$\Rightarrow$ Basis

Basis von Kern & Bild:

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Kern:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \begin{array}{cccc|c} & & \downarrow & \downarrow & \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad x_4 = s \in \mathbb{R} \qquad x_2 = \frac{3x_4 - 3x_3}{2} = \frac{3s - 3t}{2}$$

$$x_3 = t \in \mathbb{R} \qquad x_1 = \frac{-x_2 - x_3}{2} = \frac{3}{4}t - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}s$$

$$= \frac{1}{4}t - \frac{3}{4}s$$

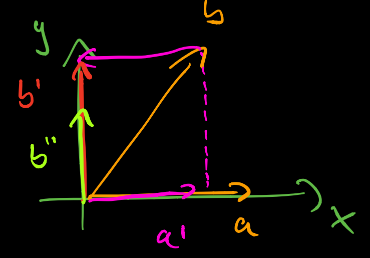
$$\Rightarrow \mathcal{L} = \mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{4}t - \frac{3}{4}s \\ \frac{3}{2}s - \frac{3}{2}t \\ t \\ s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren:



(i) $\underline{e^{(1)} = \dfrac{b^{(1)}}{\|b^{(1)}\|}}$

(ii) $e^{(2)'} = b^{(2)} - \langle b^{(2)}, e^{(1)} \rangle \cdot e^{(1)}$ & $\underline{e^{(2)} = \dfrac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|}}$

(iii) $e^{(3)'} = b^{(3)} - \langle b^{(3)}, e^{(1)} \rangle e^{(1)} - \langle b^{(3)}, e^{(2)} \rangle e^{(2)}$ & $\underline{e^{(3)} = \dfrac{e^{(3)'}}{\|e^{(3)'}\|}}$

usw.

Beispiel: P_4 mit $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$, $\operatorname{span}\{1, 3x^4\}$

(i) $e^{(1)} = \dfrac{1}{\|1\|} = \underline{\underline{1}}$

$$\|1\| = \sqrt{\langle 1, 1 \rangle} = \sqrt{\int_0^1 1\, dx} = 1$$

(ii) $e^{(2)'} = 3x^4 - \langle 3x^4, 1 \rangle 1$

$$= 3x^4 - \int_0^1 3x^4 \cdot 1\, dx \cdot 1$$

$$= 3x^4 - \left[\frac{3}{5} x^5 \right]_0^1 \cdot 1 = \underline{3x^4 - \frac{3}{5}}$$

$$e^{(2)} = \frac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|} = \underline{\underline{\frac{15}{4} x^3 - \frac{3}{4}}}$$

$$\|e^{(2)'}\| = \sqrt{\int_0^1 \left(3x^4 - \frac{3}{5}\right)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 9x^8 - \frac{18}{5} x^4 + \frac{9}{25}\, dx}$$

$$= \sqrt{\left[x^9 - \frac{18}{25} x^5 + \frac{9}{25} x \right]_0^1} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

Verallgemeinerte Norm:

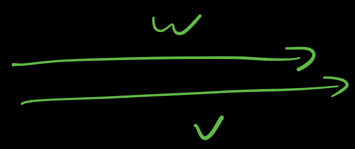
$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|$$

$\forall v, w \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $\|v\| \geq 0$ & $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(ii) $\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$



Verallgemeinertes Skalarprodukt:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (a,b) \mapsto \langle a, b \rangle$$

$\forall x, y, z \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(i) $\langle x, \lambda(y+z) \rangle = \langle x, \lambda y \rangle + \langle x, \lambda z \rangle$

$$= \underline{\lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle x, z \rangle}$$

$$\begin{pmatrix} \det(\lambda A) \\ \lambda^{\wedge} \det(A) \end{pmatrix}$$

(ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Induzierte Norm:

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $a \in V$

$$\Rightarrow \|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\langle x, y \rangle_A = x^T A y$ ein Skalarprodukt

$\forall x, y, z \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$

(i)

$$\langle x, \lambda(y+z) \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle x, z \rangle$$

$$x^T A (\lambda(y+z)) = x^T A \lambda y + x^T A \lambda z$$

$$= \lambda x^T A y + \lambda x^T A z$$

$$= \lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle x, z \rangle \checkmark$$

(ii)

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

$$x^T A y = (x^T A y)^T = y^T A^T x = y^T A x = \langle y, x \rangle \checkmark$$

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

$x^T A x \geq 0 \iff$ alle $\lambda_i \in EW$ von $A > 0$

Hurwitz:

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{\det(2) = 2 > 0}, \det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= 10 - 4 = 6 \underline{> 0}$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{pos. def.}}}$ $\square$

A^k – Eigenwertproblem & Diagonalisieren:

$$A^k x = (TDT^{-1})^k x$$

$$= TD\underbrace{T^{-1}T}_{I}D\underbrace{T^{-1}T}_{I}\cdots\cdots\underbrace{T^{-1}T}_{I}DT^{-1}x$$

$$= TD^kT^{-1}x$$

$$= T\begin{bmatrix} d_1 & & & \emptyset \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & d_n \end{bmatrix}^k T^{-1}x$$

$$= T\begin{bmatrix} d_1^k & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & d_n^k \end{bmatrix} T^{-1}x$$

$$= TD^k\underbrace{T^{-1}x}_{z} \qquad z = T^{-1}x$$

$$Tz = x$$

$$= TD^kz$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A^{10} x \overset{?}{}$$

EW: $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} \overset{+}{-\lambda} & \overset{-}{-2} & \overset{+}{2} \\ \overset{-}{-2} & \overset{+}{-\lambda} & \overset{-}{-2} \\ \overset{+}{1} & \overset{-}{-1} & \overset{+}{2-\lambda} \end{bmatrix}$

$$= -\lambda \det \begin{bmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} + 2 \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$+ \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -\lambda & -2 \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda [\lambda^2 - 2\lambda - 2] + 2 [2\lambda - 4 + 2] + [2\lambda + 4]$$

$$= -\lambda [\lambda^2 - 2\lambda - 2] + 6\lambda$$

$$= -\lambda [\lambda^2 - 2\lambda - 8] \qquad \lambda_1 = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0 \qquad \lambda_2 = \underline{-2}, \quad \lambda_3 = \underline{4}$$

$$\Rightarrow D = \underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}$$

EV: $(A-\lambda I)x=0$

$\lambda_1=0$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3=s \\ x_2=s \\ x_1=-s \end{array}$

$$\Rightarrow \underline{E_0 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$$

$\lambda_2=-2$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3=0 \\ x_2=s \\ x_1=s \end{array}$

$$\Rightarrow \underline{E_{-2} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}}$$

$\lambda_3=4$: $\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3=s \\ x_2=-s \\ x_3=s \end{array}$

$$\Rightarrow \underline{E_4 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$$

$$\Rightarrow \underline{T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$A^{10}x = TD^{10}z \qquad Tz = x$$

$z:$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} z_3 = 0 \\ z_2 = 2 \\ z_1 = 1 \end{array} \Rightarrow z = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{10} x = T D^{10} z = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2048 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2048 \\ 2048 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$y' = Ay \overset{\text{Euler}}{\Rightarrow} y = e^{At} y_0$$

gekoppelt

$$y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3$$
$$y_2' = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \quad - -$$
$$y_3' = \cdot \quad - \quad - \quad -$$

$$y' = Ay$$
$$= T D \underbrace{T^{-1} y}_{z}$$

$$Tz = y$$

$$T^{-1} y' = D T^{-1} y$$

$$z' = Dz$$
$$z_1' = d_1 z_1$$
$$z_2' = \qquad d_2 z_2$$
$$z_3' = \qquad\qquad d_3 z_3$$

$$z = e^{Dt} z_0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} z_1 &= \underline{e^{d_1 t} \quad c_1} \\ z_2 &= \underline{e^{d_2 t} \quad c_2} \\ z_3 &= \underline{e^{d_3 t} \quad c_3} \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} e^{d_1 t} & & \emptyset \\ & e^{d_2 t} & \\ \emptyset & & e^{d_3 t} \end{bmatrix} z_0$$

$$z = e^{Dt} z_0 \qquad\qquad Tz = y$$

$$y = Tz = \underline{T e^{Dt} z_0}$$

$$= \begin{bmatrix} | & | & | \\ t^{(1)} & t^{(2)} & t^{(3)} \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \emptyset \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ \emptyset & & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$= c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} | \\ t^{(1)} \\ | \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} | \\ t^{(2)} \\ | \end{bmatrix} + c_3 e^{\lambda_3 t} \begin{bmatrix} | \\ t^{(3)} \\ | \end{bmatrix}$$

Beispiel:

a) $$A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \\ -9 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad y' = Ay$$

b) AWP: $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

a)

EW: $$\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} -6-\lambda & 0 & 2 \\ -9 & 3-\lambda & 1 \\ -9 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (3-\lambda) \det \begin{bmatrix} -6-\lambda & 2 \\ -9 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (3-\lambda) \Big[\underbrace{(\lambda+6)(\lambda-3)}_{-18} + 18 \Big]$$

$\underline{\lambda_1 = 3}$
$\underline{\lambda_2 = 0}$
$\underline{\lambda_3 = -3}$

EU: $(A - \lambda I)x \overset{!}{=} 0$

$\lambda_1 = 3$: $$\left[\begin{array}{ccc|c} -9 & 0 & 2 & 0 \\ -9 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_2 = s \\ x_1 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{E_3 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}$$

$\lambda_2 = 0$: $$\left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 2 & 0 \\ -9 & 3 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = \frac{2}{3}s \\ x_1 = \frac{1}{3}s \end{array}$$

$$\Rightarrow E_0 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\lambda_3 = -3: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 2 & 0 \\ -9 & 6 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = \frac{5}{6}s \\ x_1 = \frac{2}{3}s \end{array}$$

$$\Rightarrow E_{-3} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & & \emptyset \\ & 0 & \\ \emptyset & & -3 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{0t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

b) AWP: $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, y_0? $\quad y_0 = \begin{bmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ y_{03} \end{bmatrix}$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \\ c_3 \in \mathbb{R} \end{array} \qquad Tz = y$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow y_0 = y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Prüfung HS18:

1. [6 Punkte] In dieser Aufgabe betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) [2.5 Punkte] Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von A.

b) [1 Punkt] Bestimmen Sie eine orthonormierte Basis zu A aus den Eigenvektoren.

c) [2.5 Punkte] Berechnen Sie die Matrix

$$e^A = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} A^n \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a)

EW: $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$= (2-\lambda) \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$+ \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-\lambda & 2 \end{bmatrix}$

$= (2-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 4] - [1-\lambda-2] + [2+\lambda-1]$

$= (2-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 4] + 2\lambda + 2$

$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 - 4(2-\lambda) + 2\lambda + 2$

$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 + 6\lambda - 6$

$= (1-\lambda)[\underbrace{(2-\lambda)(1-\lambda)}_{6} - 6]$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = -1$

$\lambda_3 = 4$

$EV: (A-\lambda I)x \overset{!}{=} 0$

$$\lambda_1 = 1: \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = s \\ x_1 = -2s \end{array}$$

$$\Rightarrow E_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\lambda_2 = -1: \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = -s \\ x_1 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow E_{-1} = \operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\lambda_3 = 4: \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = s \\ x_1 = s \end{array}$$

$$\Rightarrow E_4 = \operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

b) $B = \{E_1, E_{-1}, E_4\}$

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

c) $$e^A = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^n}{n!} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{T D^n T^T}{n!}$$

$$= T \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{D^n}{n!} \right) T^T = T e^D T^T$$

$$D^0 + D^1 + \frac{D^2}{2} + \frac{D^3}{6} + \dots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d_1^2}{2} & & \\ & \frac{d_2^2}{2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d_1^n}{n!} & & \\ & \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d_2^n}{n!} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{d_1} & & \\ & e^{d_2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$e^A = T e^D T^T$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2e & 1e & 1e \\ 0 & -\sqrt{3}e^{-1} & \sqrt{3}e^{-1} \\ \sqrt{2}e^4 & \sqrt{2}e^4 & \sqrt{2}e^4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4e+2e^4 & -2e+2e^4 & -2e+2e^4 \\ -2e+2e^4 & e+3e^{-1}+2e^4 & e-3e^{-1}+2e^4 \\ -2e+2e^4 & e-3e^{-1}+2e^4 & e+3e^{-1}+2e^4 \end{bmatrix}$$

2. [6 Punkte] Gegeben seien

$$A = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) [1 Punkt] Geben Sie die Normalgleichungen für die Matrix A und den Vektor b an.

b) [2 Punkte] Berechnen Sie die Singulärwerte von A.

Hinweis: Die Singulärwerte enthalten keine Wurzeleinträge. Dies gilt auch für die Matrizen U und V in Teilaufgabe **c**). Falls Sie sich bei **b)** verrechnet haben, können Sie bei **c)** mit den Werten 2 und 1 rechnen.

c) [2 Punkte] Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung von A an, also $A = U\Sigma V^\top$, wobei $\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

d) [1 Punkt] Bestimmen Sie ein x sodass $\|Ax - b\|_2 = \min_{v\in\mathbb{R}^2} \|Av - b\|_2$ gilt.

$$Ax = b \qquad S = \begin{bmatrix} \hat{S} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$USV^Tx = b$$

$$SV^Tx = U^Tb = d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{S}V^Tx = d_0$$

$$x = \underline{V\hat{S}^{-1}d_0}$$

a) $\underline{\underline{A^TAx = A^Tb}}$

U, V orthogonal

U: EV von AA^T

V: EV von A^TA

S: $\sqrt{\lambda}$ von A^TA oder AA^T

b)

$$V: \quad A^TA = \frac{1}{225}\begin{bmatrix} -2 & 8 & 20 \\ -14 & -19 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{225}\begin{bmatrix} 468 & -324 \\ -324 & 657 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{75}\begin{bmatrix} 156 & -108 \\ -108 & 219 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 52 & -36 \\ -36 & 73 \end{bmatrix}$$

$$\text{EW:} \quad \det(A^TA - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det\begin{bmatrix} 52-25\lambda & -36 \\ -36 & 73-25\lambda \end{bmatrix}$$

$= (52 - 25\lambda)(73 - 25\lambda) - 36^2 \stackrel{!}{=} 0$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

$\lambda = 0$?

$\lambda = 1 \quad 27 \cdot 48$

$\lambda = \underline{1}$

$3 \cdot 3 \cdot 3 \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$\lambda = \underline{4}$

$(-48)\ (-27)$

$\sigma_1 = \underline{\underline{2}} \quad , \sigma_2 = \underline{\underline{1}}$

c) $\underline{\underline{\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}}$ $\quad u^{(i)} = \frac{A v^{(i)}}{\sigma^{(i)}} \quad v^{(i)} = \frac{A^T u^{(i)}}{\sigma^{(i)}}$

EV: $(A^T A - \lambda I) x = 0$

$\lambda_1 = 4: \quad \left[\begin{array}{cc|c} -48 & -36 & 0 \\ -36 & -27 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cc|c} -48 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_1 = -\frac{3}{4} s \end{array}$

$\frac{3}{4}$

$\Rightarrow E_4 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$

$\underline{= \text{span}\left\{ \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}}$

$$\lambda_2 = 1: \quad \left[\begin{array}{cc|c} 27 & -36 & 0 \\ -36 & 48 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cc|c} 27 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = s \\ x_1 = \frac{4}{3} s \end{array}$$

$$\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow E_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \operatorname{span}\left\{ \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$u^{(1)} = \frac{A v^{(1)}}{\sigma^{(1)}} = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} -50 \\ -100 \\ -100 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$u^{(2)} = \frac{A v^{(2)}}{\sigma^{(2)}} = \frac{1}{75} \begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{75} \begin{bmatrix} -50 \\ -25 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$u^{(3)} = u^{(1)} \times u^{(2)} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

d)

$$Ax = b$$
$$USV^T x = b$$
$$SV^T x = U^T b = d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{S} V^T x = d_0$$
$$x = V \hat{S}^{-1} d_0$$

$$d = U^T b = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, d_0 \\ \\ d_1 \end{matrix}$$

$$x = V\hat{S}^{-1} d_0 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{26}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 \\ -26 \end{bmatrix}$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{S}^{+} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & \beta & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) [1.5 Punkte] Finden Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

Im Folgenden seien α und β nun wie in Teilaufgabe **a)**.

b) [3.5 Punkte] Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

Hinweis: Leider lässt sich hier $\sqrt{2}$ nicht vermeiden...

c) [1 Punkt] Berechnen Sie $|\det(A)|$.

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) $\underline{\underline{\beta = -1}}, \quad \underline{\underline{\alpha = \frac{5}{2}}}$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{45}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{25}{4} + 4 + 1} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{\sqrt{45}}{2}$$

c)

$$|\det A| = |\det Q \cdot R| = |\underbrace{\det Q}_{\pm 1} \det R|$$

$$= |\det R|$$

$$= \underline{\underline{\frac{45}{2}}}$$

4. [6 Punkte] Sei $\mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad strikt kleiner als 3. Im Folgenden betrachten wir die Mengen

$$\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\} \subseteq \mathcal{P}_3,$$
$$\mathcal{B}_2 = \{x-1, x+1, x^2-1\} \subseteq \mathcal{P}_3$$

sowie die Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, die für alle $p \in \mathcal{P}_3$, $x \in \mathbb{R}$ durch

$$[\mathcal{F}(p)](x) = p(x) - \left(\int_0^1 y\, p'(y)\, \mathrm{d}y\right) \cdot x$$

gegeben ist (wobei p' hier wie gewohnt die Ableitung von p bezeichnet).

a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

b) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix F, durch die $\mathcal{F}$ beschrieben wird, wenn wir die Basis $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{P}_3$ verwenden.

c) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_2$ eine Basis von $\mathcal{P}_3$ ist.

d) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T für den Basiswechsel von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$ (T überführt also Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_2$ in Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_1$).

a) $\mathcal{F}$ ist wohldefiniert, da

$\mathcal{F}(1) = \underline{1} \in \mathcal{P}_3$, $\quad \mathcal{F}(x) = \underline{\frac{1}{2}x} \in \mathcal{P}_3$

$$\mathcal{F}(x^2) = x^2 - \left(\int_0^1 y\,[y^2]'\,dy\right)x$$
$$= x^2 - \int_0^1 2y^2\,dy\; x$$
$$= x^2 - \left[\frac{2}{3}y^3\right]_0^1 x$$
$$= \underline{x^2 - \frac{2}{3}x} \in \mathcal{P}_3$$

Wir überprüfen auf Linearität, es muss gelten:

$\forall a, b \in V,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $\mathcal{F}(a+b) = \mathcal{F}(a) + \mathcal{F}(b)$

(ii) $\mathcal{F}(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \mathcal{F}(a)$

überprüfen i) & ii) $\quad \forall a, b \in \mathcal{P}_3,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(\underbrace{a+\alpha b}_{p(x)}) = (a+\alpha b) - \left(\int_0^1 y(a+\alpha b)'\,dy\right)\cdot x$$

$$= a+\alpha b - \left(\int_0^1 ya' + \alpha y b'\,dy\right)\cdot x$$

$$= a+\alpha b - \int_0^1 ya'\,dy\,x - \int_0^1 \alpha y b'\,dy\,x$$

$$= a - \int_0^1 ya'\,dy\,x + \alpha\left(b - \int_0^1 yb'\,dy\,x\right)$$

$$= \mathcal{F}(a) + \alpha\,\mathcal{F}(b) \quad \square$$

b) B_1 $\qquad B_1$

$$(1) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 = 1\cdot(1) + 0\cdot(x) + 0\cdot(x^2)$$

$$(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}x = 0\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot x + 0\cdot x^2$$

$$(x^2) \xrightarrow{\mathcal{F}} x^2 - \frac{2}{3}x = 0\cdot 1 - \frac{2}{3}x + 1\cdot x^2$$

$$\Rightarrow F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F\cdot[a]_{B_1} = \mathcal{F}(a) = a_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix}0\\-\frac{2}{3}\\1\end{bmatrix}$$

c) $B_2 = \{x-1, x+1, x^2-1\}$

Lin. unabh. testen:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{G.} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{volle rang}$$

$\Rightarrow$ lin. unabh. $\Rightarrow$ 3 Vektoren für 3 dimensionen $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Basis}}}$

d) $B_2 \xrightarrow{T} B_1$

$B_1 \xrightarrow{F} B_1$

$$x-1 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$x+1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$x^2-1 = -1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2$$

$$\Rightarrow T = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

$$T \cdot [a]_{B_2} = [a]_{B_1}$$

$$\begin{tikzcd}
P_3 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "k_x"'] & P_3 \arrow[d, "k_x"] \\
B_1 \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift left, "T^{-1}"] & B_1 \arrow[d, shift left, "T^{-1}"] \\
B_2 \arrow[r, "\tilde{F}"'] \arrow[u, shift left, "T"] & B_2 \arrow[u, shift left, "T"]
\end{tikzcd}$$

$\tilde{F} = T^{-1} F T$

$x - 1 \xrightarrow{F} \frac{1}{2}x - 1 =$

$x + 1 \xrightarrow{F} \frac{1}{2}x + 1 =$

$x^2 - 1 \xrightarrow{F} x^2 - \frac{2}{3}x - 1 =$

5. [6 Punkte] Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit $\det(A) < 0$. Zeigen Sie folgenden Aussagen:

a) [1 Punkt] Mindestens ein Eigenwert von A ist strikt negativ.

b) [2 Punkte] Es gibt ein $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $x^\top Ax < 0$.

c) [3 Punkte] Die Aussagen in a) und b) gelten auch für Matrizen, die nicht symmetrisch sind.

A symm. $\det(A) < 0$

a)

$$\det(A) = \det(TDT^T)$$

$$= \underbrace{\det T}_{\pm 1} \det D \underbrace{(\det T)^T}_{\pm 1}$$

$$= \det D = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n < 0$$

$$\Leftrightarrow \exists i \in [1,n] : \lambda_i < 0 \quad \square$$

b)

$$x^T A x < 0$$

$$x^T T D T^T x < 0 \qquad \Rightarrow x = T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{t^{(i)}}$$

$$(T^T x)^T D T^T x$$

Wählen $T^T x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow$ i-te Stelle für $\lambda_i < 0$

$$\Rightarrow (T^T x)^T D T^T x = \lambda_i < 0 \qquad \square$$

$$[0 0 \ldots 1 \ldots 0 0]\, D \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Schur-Zerlegung:

$$A = S R S^T$$

S orth.

R obere rechte Dreiecksmatrix

a) $\det(A) = \underbrace{\det(S)}_{\pm 1} \det(R) \underbrace{\det(S^T)}_{\pm 1}$

$= \det R = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n < 0 \quad \square$

b) wählen $x = s^{(i)}$, die i-te Spalte von S, falls $\lambda_i < 0$

$\Rightarrow \quad (S^T x)^T R S^T x = \lambda_i < 0 \quad \square$

6. [6 Punkte] Multiple-Choice: Auf dem Extrablatt "Richtig" oder "Falsch" ankreuzen.

a) [1 Punkt] Sei $n \in \mathbb{N}$ und A eine reelle $n \times n$ Matrix, die in Matlab eingegeben wurde. Folgende Befehle werden darauf eingegeben:

```
>> [Q, ~] = qr(A);
>> max(diag( abs(Q.'*Q - eye(size(Q))) )) < 1e-1
```

Kreuzen Sie 'Richtig' an, wenn wir erwarten können, dass Matlab den logischen Wert 1 zurückgibt. Kreuzen Sie 'Falsch' an, wenn wir erwarten können, dass Matlab den logischen Wert 0 zurückgibt.

$\max(\operatorname{diag}(\| \underbrace{Q^T Q - I}_{0} \|)) < 0.1$

richtig

b) [1 Punkt] Sei A eine reelle 3×3 Matrix, welche schiefsymmetrisch ist, das heisst $A^\top = -A$. Dann ist gilt $\det(A) = 0$.

richtig

c) [1 Punkt] Wir definieren die Matrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es gilt dann, dass $P^{100} = P^{21}$.

falsch

d) [1 Punkt] Sei A eine reelle 2×2 Matrix und habe die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Die characteristische Gleichung zu A lautet $x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot x + \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$.

$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$

$= x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1 \lambda_2$

richtig

e) [1 Punkt] Die LR-Zerlegung einer Matrix A liefert

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Die Determinante von A ist 14.

falsch

f) [1 Punkt] Die folgende Matrix ist gegeben,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Somit gilt $\operatorname{Kern}(A) = \{0\}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{G.} \begin{bmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

richtig

b) $\det(A^T)$ — $\det(A)^T = \det(A)$

$\det(-A) = (-1)^n \det(A)$ $\overset{?}{=}$

c) $P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $P^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow P$

$P^3 = P^0 = P^6$

P^{100} : $100 \bmod 3 = 1$

P^{21} : $21 \bmod 3 = 0$